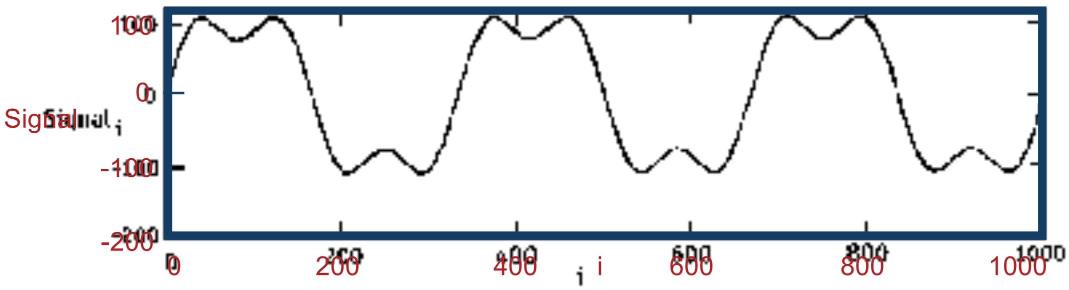
AstroNova™
Test & Measurement

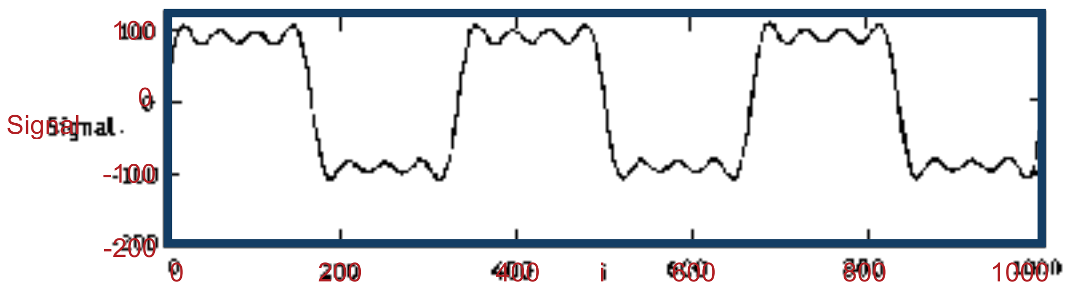
Technische Information

Fourier-Analyse und FFT

Einführung

Die Fourier-Analyse beruht auf dem Konzept, dass sich reale Signale durch die Aufsummierung von jeweils mit einer unterschiedlichen Freqenz arbeitenden Sinuskurven annähern lassen. Je mehr Sinuskurven in dieser Summe enthalten sind, desto genauer wird der erreichte Näherungswert.





Die erste Trace in der oben dargestellten Abbildung ist die Summe zweier Sinuskurven, deren Amplituden so gewählt wurden, dass sie sich einem 3-Hz-Rechtecksignal (Zeitbasis in ms) annähern. Eine Sinuskurve hat eine Frequenz von 3 Hz, die andere eine Frequenz von 9 Hz. Der zweite Trace beginnt zusammen mit dem ersten, fügt jedoch eine 15-Hz- und eine 21-Hz-Kurve hinzu. Es ist deutlich zu erkennen, das dies eine bessere Annäherung bewirkt.

Eine solche Summe von Sinuskurven wird als trigonometrische Fourierreihe bezeichnet. Die Terme der Fourierreihe für einfache Signale lassen sich durch Integration berechnen und sind umfassend in den üblichen Lehrbüchern veröffentlicht worden.

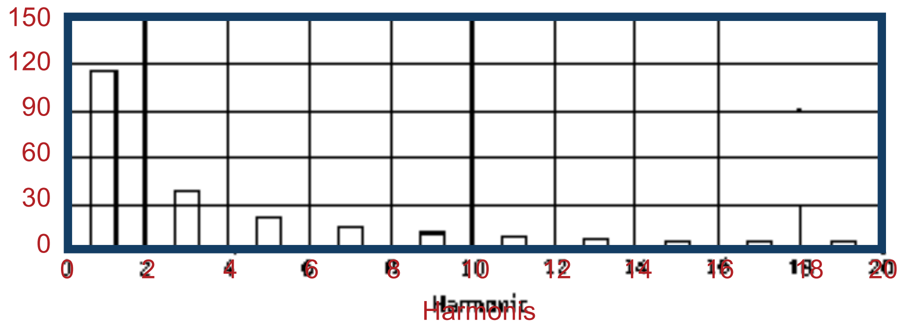
Die Frequenz jeder Sinuskurve innerhalb der Reihe ist ein ganzzahliges Vielfaches der Frequenz des angenäherten Signals. Diese ganzzahligen Vielfachen werden als Harmonische des ursprünglichen Signals bezeichnet. Im oben gezeigten Beispiel liegt die Grundfrequenz bei 3 Hz, sodass man Harmonische bei 3 Hz, 6 Hz, 9 Hz, 12 Hz, 15 Hz usw. erwarten würde. Bei diesem bestimmten Signal stellt sich heraus, dass alle geradzahligen Harmonischen eine Amplitude von 0 haben. Dies gilt jedoch nicht für alle Signale.

Das Frequenzspektrum

Jede harmonische Frequenz ist durch eine Größe (Amplitude) und eine Phase definiert. Die Phase gibt an, wie die Harmonische verschoben werden muss, bevor sie zur Summe hinzugefügt wird. Die Phaseninformation ist unter Umständen schwierig zu interpretieren, sodass deren Nutzung auf wenige sehr spezielle Anwendungen beschränkt ist. Im weiteren Verlauf dieses Dokuments werden demzufolge nur harmonische Größen behandelt.

Das Plotten der harmonischen Größen auf der y-Achse und der Frequenz der Harmonischen auf der x-Achse erzeugt ein Frequenzspektrum.

Das Spektrum besteht aus einer Reihe von vertikalen Linien oder Balken, da Harmonische nur Frequenzen aufweisen können, die ganzzahlige Vielfache der ursprünglichen Signalfrequenz sind. In der Theorie umfasst das Spektrum Frequenzen bis ins Unendliche, praktisch jedoch ist die Größe bei sehr hohen Harmonischen der Frequenz üblicherweise unwesentlich.



Der hier dargestellte Plot umfasst die ersten 20 Harmonischen eines Rechtecksignals. Die x-Achse zeigt die Nummer der Harmonischen. Zur Umwandlung der Nummer der Harmonischen in Hz ist diese ganz einfach mit der Frequenz des ursprünglichen Signals zu multiplizieren. Hätte beispielsweise das ursprüngliche Signal eine Frequenz von 2 kHz, läge die Frequenz der dritten Harmonischen bei 6 kHz.

Hierbei ist zu beachten, dass die geradzahligen Harmonischen gleich 0 sind, da das ursprüngliche Signal ein Rechtecksignal war. Dies ist jedoch nicht immer der Fall. Falls der Eingang ein reiner Ton gewesen wäre, würde man einen einzigen Balken mit einer Amplitude gleich derjenigen des Eingangstons erwarten.

Fourier-Analyse mit Computern - FFT

Es wurden bereits mehrere Methoden entwickelt, um einem Computer die Berechnung des Frequenzspektrums eines Signals zu ermöglichen. Der erste Schritt besteht in allen Fällen darin, das Signal in eine Zahlenmenge umzuwandeln, die vom Computer verwendet werden kann. Dies geschieht durch das Sampling des Signals in regelmäßigen Intervallen, wodurch eine Wertetabelle erstellt wird. Die einzelnen Samplingwerte werden voneinander durch einen festgelegten Zeitabstand getrennt.

Die Anzahl der so erhaltenen Punkte und die Zeit zwischen den Samples bestimmen zusammen genommen die Zeitspanne, in der das Signal betrachtet wird. Hierbei gelten die folgenden Definitionen:

fs = Abtastrate in Hz
dT = 1/fs = Intervall zwischen den Samples
N = Anzahl der erfassten Samples
T = N x dT = gesamte Zeitspanne
f1 = 1/T = Frequenz der ersten Harmonischen in Hz

Wenn wir uns beispielsweise für die Spannungskurve interessieren würden, könnten wir eine Abtastrate (fs) von 6000 Hz wählen und 100 Samples (N=100) erfassen. Das Ergebnis wäre dT = 0,1667 ms und T = 16,667 ms. Die erste Harmonische wäre dann f1 = 60 Hz. Der traditionelle mathematische Ansatz der Fourier-Analyse basierte auf der Annäherung kontinuierlicher Signale, wohingegen computergestützte Methoden nur mit einem Satz von Samples arbeiten können. Dies ändert zwar nichts an der Grundidee der harmonischen Analyse, doch müssen wir nun Folgendes beachten:

1. Die auf gesampelten Signalen basierenden Spektren können nur N/2 Harmonische erzeugen.

2. Falls das ursprüngliche Signal mehr als N/2 Harmonische enthält, führen die höherfrequenten Harmonischen zu Fehlern im Größenspektrum.

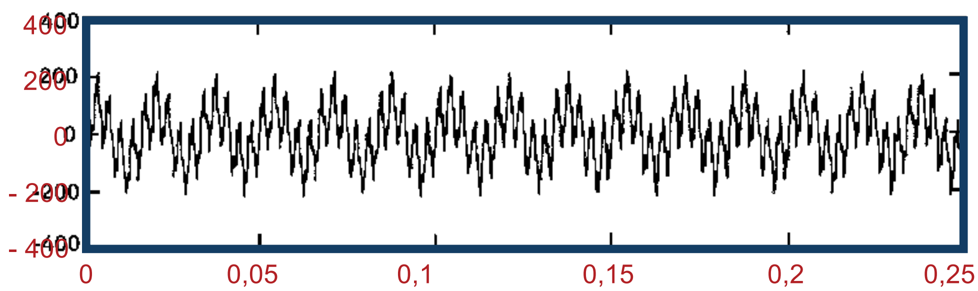
Diese Art von Fehlern wird als Aliasing bezeichnet. Das Aliasing lässt sich vermeiden, indem das Eingangssignal vor Ausführung der Fourier-Analyse gefiltert wird, sodass keine Frequenzkomponenten oberhalb von f1 und N/2 mehr vorhanden sind. Der gängigste Computeralgorithmus für die Erzeugung eines Frequenzspektrums ist die so genannte schnelle Fourier-Transformation (Fast Fourier Transform, FFT). Wie der Name schon sagt, ist die FFT sehr effizient, doch weist sie auch eine Eigenart auf, die sich auf ihre Verwendbarkeit auswirkt. Die FFT kann nur ein gesampeltes Signal verarbeiten, beim dem N (die Anzahl der Samples) eine zweite Potenz ist. Zulässige Werte von N sind somit 128, 256, 512 und 1024. Die volle Tragweite dieses Umstands wird im weiteren Verlauf dieses Dokumentes erläutert.

Anm.: Die FFT erzeugt wie die meisten Computeralgorithmen eine exponentielle Fourierreihe anstelle einer trigonometrischen Reihe. Die beiden Reihen sind identisch mit Ausnahme der von der exponentiellen Reihe generierten Größe, die der Hälfte des Werts der trigonometrischen Reihe entspricht. Die meisten Applikationssoftwareprodukte gleichen dies automatisch aus und stellen das Größenspektrum als trigonometrische Reihe dar.

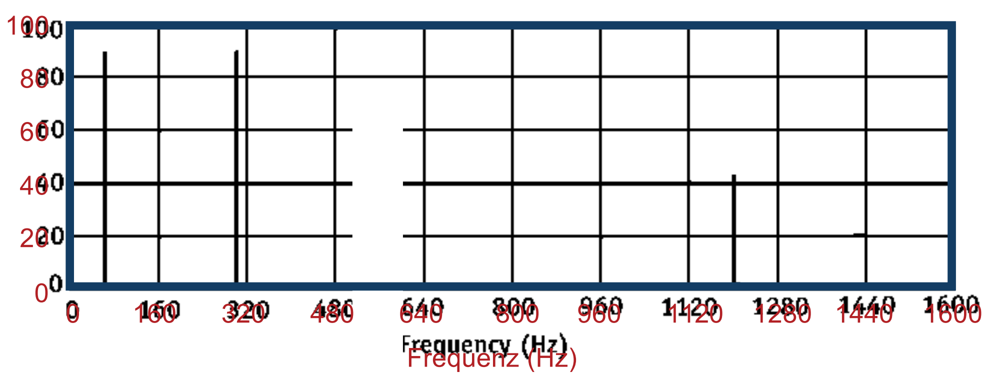
Analyse von komplexeren Signalen

Wir sind bislang davon ausgegangen, dass das Eingangssignal periodisch mit einer konstanten Frequenz ist. Wir hatten das Spektrum so eingerichtet, dass die erste Harmonische gleich der Eingangsgrundfrequenz war. Dieser geradlinige Ansatz ist sinnvoll, wenn wir bereits vorab etwas über das Signal wissen, wie dies beispielsweise bei der Analyse von Wechselspannungen der Fall ist.

In vielen Situationen werden wir jedoch mit einem komplexeren Signal konfrontiert, das unter Umständen keine augenfällige einzelne Periode hat. Im Folgenden ist ein Beispiel angegeben:



Die x-Achse gibt die Zeit in Sekunden an. Wenn wir dieses Signal bei einer Rate von 4096 Hz abtasten, 1024 Samples erfassen und diese durch unsere FFT verarbeiten lassen, erhalten wir das folgende Spektrum:



Das Spektrum zeigt, dass sich das ursprüngliche Signal aus 3 reinen Tönen zusammensetzt. Diese Töne liegen bei 60 Hz, 300 Hz und 1200 Hz.

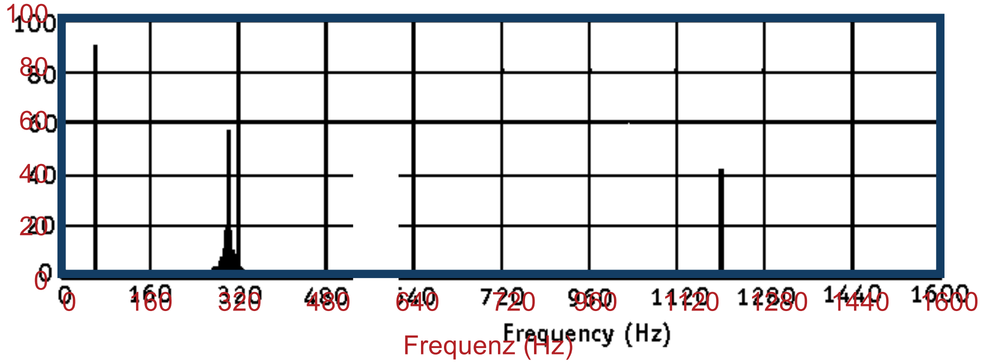
Es ist sinnvoll, an dieser Stelle ein paar Beobachtungen anzustellen:

1. Da N=1024 ist, erzeugte die FFT 512 Harmonische. Um die Skalierung der x-Achse zu vereinfachen, zeigt der Plot nur die ersten 400 davon.
2. Die Größen sind für die trigonometrische Reihe korrigiert und verwenden daher die gleichen Einheiten wie das Eingangssignal.
3. Die Länge der Samplingperiode beträgt 0,25 Sekunden, die erste Harmonische (f1) ist demnach 4 Hz. Das Spektrum sieht sehr ansprechend und sauber aus, da sämtliche Töne Vielfache von 4 Hz (f1) sind.

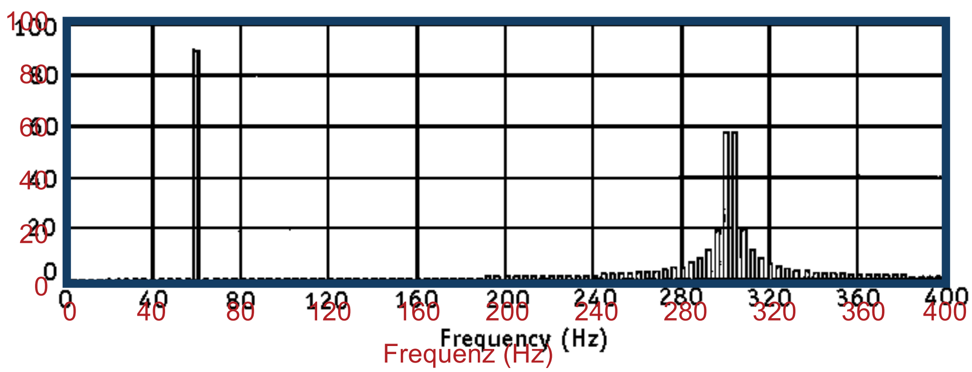
Dies ist aber leider nicht oft der Fall.

Leck-Effekte

Das vorherige Beispiel sah großartig aus, da alle Töne, aus denen sich das ursprüngliche Signal zusammensetzte, Vielfache von f1 (1/T) waren. Im Folgenden ist die gleiche Anordnung dargestellt, wobei jedoch der 300-Hz-Ton auf 302 Hz verlagert wurde.



Obwohl der 302-Hz-Ton die Amplitude nicht wirklich verändert hat, sieht das Spektrum ganz anders aus. Dieses Phänomen wird als Leck-Effekt oder auch Leakage bezeichnet und tritt auf, wenn eine Frequenzkomponente des ursprünglichen Signals kein ganzzahliges Vielfaches der Samplingperiodendauer (T) ist. Die Amplitude des Tons scheint mit anderen Harmonischen zu verschwimmen. Dieser Effekt lässt sich durch das Erweitern der x-Achse noch deutlicher darstellen.



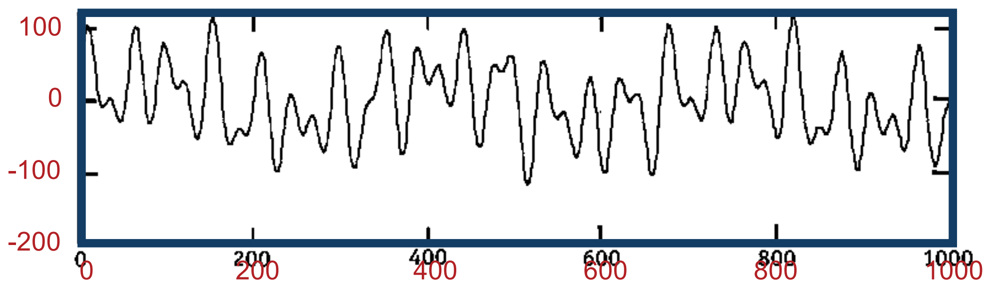
Dies ist dasselbe Spektrum, aber es werden nur die ersten 100 Harmonischen gezeigt. Die 4-Hz-Schritte werden nun sichtbar. Hierbei ist zu beachten, dass der Ton die Amplitude 90 (gleich dem 60-Hz-Ton) haben sollte.
Der Leck-Effekt ist die unmittelbare Folge der Verwendung einer begrenzten Menge von gesampelten Daten. Wenn wir eine unendliche Anzahl von Samples erfassen und verarbeiten könnten, wäre der Frequenzzuwachs (x-Achse) sehr gering und alle möglichen Frequenzen wären gültige Harmonische. Der FFT-Algorithmus verursacht nicht mehr Leakage als andere Algorithmen, aber er erschwert die Behebung des Problems, indem er die Auswahl von N auf Zweierpotenzen beschränkt.

Es gibt zwei Möglichkeiten, die Genauigkeit des Spektrums zu verbessen, wenn Leck-Effekte ein Problem darstellen.

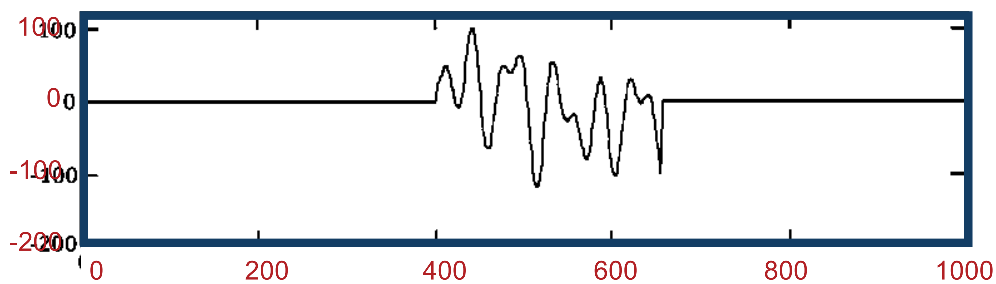
1. Ändern des Sampling-Umfangs zur Anpassung der Harmonischen
2. Ändern der gesampelten Werte mit einem gewichteten Fenster.

Nutzung gewichteter Fenster zur Verringerung von Leck-Effekten

Der Begriff "Fenster" hat eine ganz bestimmte Bedeutung, wenn er auf die zur Erstellung eines Fourier-Spektrums genutzten Samples angewandt wird. Betrachten wir einmal das Signal in der ersten Abbildung. Zur Analyse des Signals mit Blick auf die Harmonischen müssen wir es über eine feste Zeitspanne (T) sampeln.



Mathematisch gesehen entspricht dies der Multiplikation einer Wertegruppe mit 1,0 und aller anderen Werte des Signals mit 0. Wir erstellen hierdurch einen bestimmten Satz von gesampelten Daten, indem alle übrigen Teile des Signals anhand eines rechteckigen Fensters mit der Amplitude 1,0 ausgeblendet werden. Das Ergebnis ist in der folgenden Abbildung dargestellt.



Die meisten Computeralgorithmen - einschließlich der FFT - verarbeiten diesen Sample-Satz so, als handelte es sich hierbei um eine Endlosschleife. Wenn N=256 (Samples 0 bis 255) ist, dann wird angenommen, dass der auf 255 folgende Wert gleich dem Wert am Sample 0 ist. Diese Annahme ist wahr, wenn das Fenster (T) ein ganzzahliges Vielfaches eines wiederkehrenden Zyklus ist. Wenn sie aber - wie im vorliegenden Beispiel - nicht wahr ist, wird die Diskontinuität zwischen den Werten der ersten und letzten Samples von der FFT als Schrittwechsel aufgefasst und verursacht Leakage.

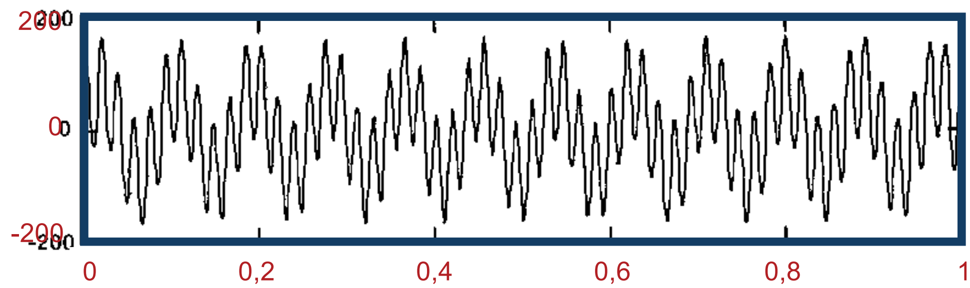
Die Verwendung eines nicht-rechteckigen Fensters kann solche Leck-Effekte verringern. Dies geschieht in der Praxis nach erfolgter Erfassung des Sample-Satzes, indem jedes einzelne Sample dieses Satzes skaliert wird. Die skalierten Werte werden anschließend als Eingangswerte für die FFT verwendet.

Mittlerweile sind viele verschiedene Fenster entwickelt worden, die jeweils unterschiedliche Kosten und Vorteile mit sich bringen.

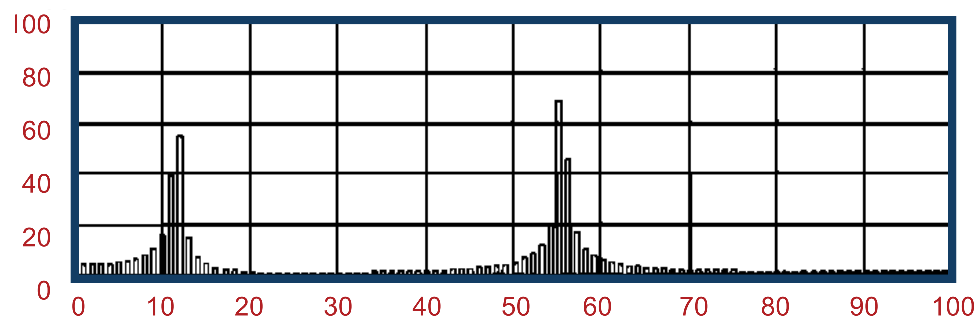
Fensterbeispiel - Rechteck

Die erste Abbildung ist ein Plot von 1024 Samples, die zur Erzeugung eines Fourier-Größenspektrums verwendet werden. Die x-Achse gibt die Zeit in Sekunden an. Der Sampling-Prozess wird anhand der folgenden Parameter definiert:

fs = 1024 Hz (Abtastrate)
N = 1024 (Anzahl der Samples)
T = 1 Sekunde (Fensterlänge)



Die FFT erzeugt 512 Harmonische (N/2) aus diesem Sample-Satz. Der Abstand zwischen den Harmonischen beträgt 1 Hz und ist somit gleich der Frequenz der ersten Harmonischen (f1 = 1/T). Die zweite Abbildung plottet die Größen der ersten 100 Harmonischen. Zu beachten ist, dass der Begriff "Harmonische" hierbei verwirrend sein kann, da diese von der Fensterlänge T abgeleitet ist und unter Umständen in keiner klar erkennbaren Beziehung zum Signal steht.

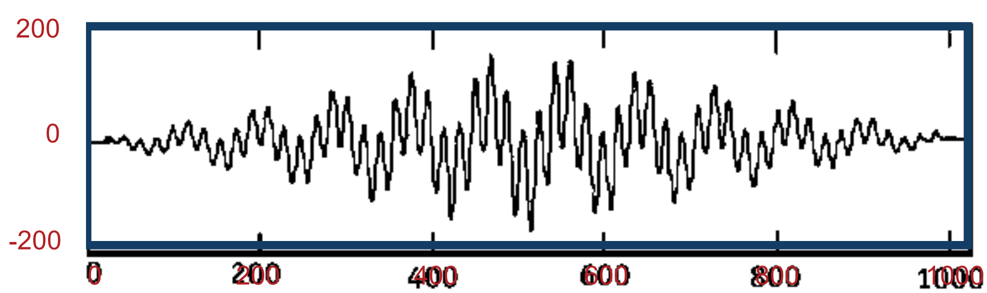


Das Spektrum zeigt, dass sich das ursprüngliche Signal aus 2 Grundkomponenten zusammensetzt, der Leck-Effekt jedoch ein Bestimmu der Größen schwierig macht. Das ursprüngliche Signal setzte sich aus 2 Tönen zusammen. Hierbei handelt es sich um einen 11,6-Hz-To mit einer Amplitude von 75 und einen 55,4-Hz-Ton mit einer Amplitude von 90.

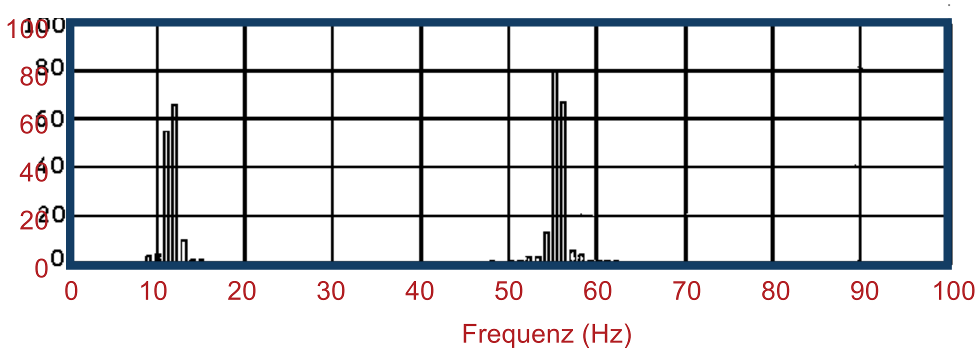
Das Spektrum weist einen Peak bei 12 Hz mit einer Größe von 55,1 und einen zweiten Peak bei 55 Hz mit einer Größe von 68,2. Die relative Größe der beiden Komponenten ist ähnlich, die absoluten Größen sind jedoch stark verzerrt.

Fensterbeispiel - Dreieck und Hamming

Die nächste Abbildung zeigt das im vorherigen Beispiel verwendete Signal nach dessen Veränderung durch ein Dreiecksfenster. Das ursprüngliche Signal wurde auf die gleiche Weise wie vorher gesampelt, wobei jedoch die gesampelten Punkte durch das Dreiecksfenster skaliert wurden. Zu beachten ist hier, wie die ersten und letzten Sampling-Punkte nun gedämpft werden.

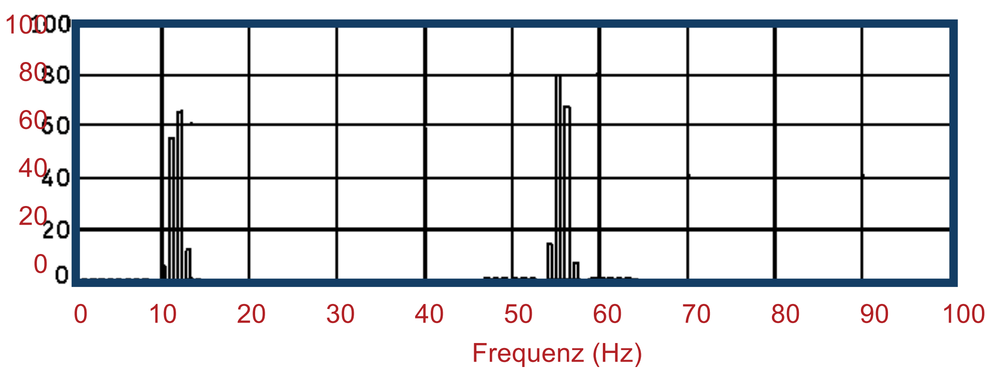


Der nächste Plot zeigt die ersten 100 Harmonischen bei Verwendung dieses modifizierten Satzes von Samples.



Die Peaks erscheinen bei der gleichen Frequenz, weisen aber eine deutlich geringere Spreizung (Leakage) auf. Die Größen sind ebenfalls genauer (65,7 und 78,8), aber immer noch nicht korrekt.

Ein weiteres häufig verwendetes Fenster ist das Hamming-Fenster, das auf einer Kosinusfunktion aufbaut. Es ist so konzipiert, dass Peaks in der Mitte der Samples erscheinen und die Anzeige an den Enden hin zu 0 hin ausläuft. Die Anwendung des Hamming-Fensters auf den gleichen Sample-Satz erzeugt das im Folgenden dargestellte Spektrum. Die Peaks befinden sich an den gleichen Punkten mit Größen von 65,7 und 79,1.



Anm.: Die Größen wurden für einen Amplitudenfehlertyp korrigiert, der durch nicht-rechteckige Fenster erzeugt wurde. Der Faktor beträgt 0,5 für da. Dreiecks- und 0,54 für das Hamming-Fenster. Es handelt sich hierbei um eine technische Korrektur auf der Basis der Keulenhöhe.

Hinweise zur Auswahl eines Fensters

1. Wenn das Eingangssignal periodisch und ein Vielfaches des Sampling-Fensters, verwenden Sie ein Rechteckfenster.
2. Falls der Eingang ein kurzzeitiger Impuls oder Burst ist, der bei der gleichen Amplitude beginnt und endet, verwenden Sie ein Rechteckfenster (sofern das Sampling-Fenster die gesamte Transiente enthält).
3. Wenn der Eingang einen Teilbereich eines kontinuierlichen Signals darstellt, das nicht periodisch ist, dann verwenden Sie bitte ein Hamming- oder Dreieckfenster.

Erneutes Sampling

Wie in den vorherigen Beispielen dargestellt kann die Verwendung von gewichteten Fenstern die Qualität des Spektrums verbessern, wenn Frequenzkomponenten keine ganzzahligen Vielfachen des Sampling-Fensters sind. Die Beispiele zeigen aber leider auch, dass selbst bei Verwendung eines gewichteten Fensters immer noch eine gewisse Verzerrung auftritt.

In Situationen, in denen größere Frequenzkomponenten Vielfache voneinander sind, ist die beste Vorgehensweise eine Anpassung des Sampling-Prozesses in der Art, dass eine vollständige Periode des Eingangssignals zum Sampling-Fenster ausgerichtet wird. Falls dies möglich ist, wird am besten ein Rechteckfenster gewählt. Diese Situation tritt in Anwendungen wie beispielsweise der Überwachung von Stromleitungen auf, bei der das Signal durch eine starke Primärfrequenz gesteuert wird.

Die sauberste Vorgehensweise besteht darin, die Abtastrate so zu verändern, dass letztendlich N Punkte in genau einer Periode des Eingangssignals erhalten werden. Dies ist bei Verwendung der FFT unter Umständen nicht praktikabel, da N eine Zweierpotenz sein muss. Die erforderliche Abtastrate ist möglicherweise nicht verfügbar oder die Daten wurden vorab erfasst und können nicht dupliziert werden.

Die Lösung für beide Probleme ist das erneute Sampling einer Datenmenge, die bei Bedarf interpoliert werden kann, um den gewünschten Sample-Satz zu erhalten.

Dezibel

Die Amplitude des Frequenzspektrums wird üblicherweise in Dezibel (dB) angegeben. Das Dezibel ist eine Einheit, die ursprünglich zur Messung der Schallintensität im Verhältnis zu einem Bezugswert verwendet wurde. Diese Einheit kann im Allgemeinen zur Angabe der Intensität oder Leistung jedes beliebigen Signals im Verhältnis zu einer Bezugsgröße angewandt werden. Durch die Verwendung einer logarithmischen Skala kann ein weiter Bereich von Amplituden auf einem einzigen Plot dargestellt werden.

Bei der Anwendung auf eine Leistung wird das dB definiert als:

dB = 10log(Leistung/Bezugsleistung)

Zu beachten ist hierbei, dass ein negativer Wert eine Leistung anzeigt, die kleiner als die Bezugsgröße ist. Die Bezugsgröße ist von der jeweiligen Anwendung abhängig, was einige Verwirrung verursachen kann. Zuweilen wird ein Buchstabe angehängt, um auf die Verwendung einer Standardbezugsgröße hinzuweisen. So misst beispielsweise ein dBm die Signalleistung mit der Bezugsgröße 1 Milliwatt. Unter der Annahme, dass die Leistung in Watt gemessen wird, gilt die folgende Gleichung:

dBm =10log(Größe/0,001)

Es ist heute allgemein üblich, den Quadratwert bestimmter Signale als Leistung zu bezeichnen. Im Falle eines

Spannungssignals und eines festen Widerstandswerts ist dies korrekt, da die Leistung sich als U*U/R ausdrücken lässt. Dieser Logik folgend wird zuweilen die Einheit dBm verwendet, wenn nur ein Spannungssignal verfügbar ist und ein Widerstand von 50 Ohm angenommen wird. Eine Sinusspannung mit einer Größe von 0,316 V wird als 0 dBm (1 mW) dargestellt.

Die Situation wird somit noch verwirrender, weil die meisten Elektrotechniker den Begriff "dB" zur Angabe der Signalamplitude (und nicht der Signalleistung) im Verhältnis zu einer Bezugsgröße verwenden. Dies lässt sich mathematisch mit der Standarddefinition verknüpfen, solange eine konstante elektrische Last (R) zugrunde gelegt wird, da:

P1/P2 = [(U1 x U1)/R]/[U2 x U2)/R] = (U1 x U1)/(U2 x U2)
und
10log[(U1 x U1)/(U2 x U2)] = 20 log(U1/U2)

Aus diesem Grund ist bei der dB-Berechnung anhand der Signalamplitude (anstelle der Signalleistung) der

Faktor 20 zu verwenden: dB = 20log(Größe/Bezugsgröße)

Die Einheit dBV basiert auf einem Bezugswert von 1 V und geht davon aus, dass das

Eingangssignal in Volt vorliegt. dBV - 10log(Größe/1V)

Die Größe lässt sich also mit dem Peak oder dem Effektivwert des ursprünglichen Signals vergleichen, um zusätzliche dB-Skalen abzuleiten. Instrumente mit einem eingebauten Verstärker können die Einheit dBVFS (FS = Full Scale) verwenden. Diese Einheit ergibt sich, indem die Größe auf den Vollausschlag des Eingangsverstärkers bezogen wird (20log(Größe/FS). Dies ist praktisch, da es nicht erforderlich ist, dass das Eingangssignal in Volt oder Watt vorliegen muss.

Hauptsitz:
West Warwick, Rhode Island 02893 U.S.A.
Tel. (401) 828-4000 • Fax (401) 822-2430
E-Mail: daq@astronovainc.com
Website:www.astronovainc.com
Gebührenfrei: (877) 867-9783 (nur in den USA)